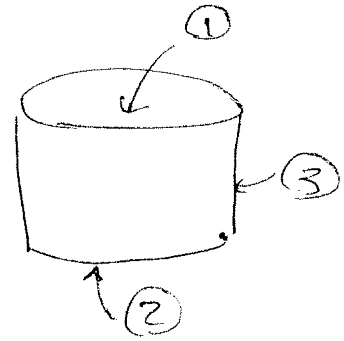
no 1 - a) Parce qu'en général, $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M} \neq 0$

b) Parce que $\vec{D}$ est un champ mésoscopique. En régime mésoscopique, il y a des surfaces où on ne peut appliquer un opérateur volumique comme $\vec{\nabla}$. Les surfaces peuvent être des sources de $\vec{D}$ dont on tient compte par l'intermédiaire des conditions aux frontières.

c) Parce qu'une transformation de jauge laisse les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ inchangés.

2- a) $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$

$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$



surface 1 : $\sigma_p = P_0$
surface 2 : $\sigma_p = -P_0$
surface 3 : $\sigma_p = 0$

b) Loin du cylindre, le champ électrique est celui d'un dipôle avec

$$\vec{p} = \int_V \vec{P}\, d\tau = P_0 \pi R^2 h\, \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{P_0 \pi R^2 h}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left(2\cos\theta\, \hat{r} + \sin\theta\, \hat{\theta}\right)$$

c) Pour $\vec{E}$:

surface 1 : $E_{2\perp} = E_{1\perp} + P_0/\varepsilon_0$; $\vec{E}_{2\parallel} = \vec{E}_{1\parallel}$
surface 2 : $E_{2\perp} = E_{1\perp} - P_0/\varepsilon_0$; $\vec{E}_{2\parallel} = \vec{E}_{1\parallel}$
surface 3 : $\vec{E}_2 = \vec{E}_1$

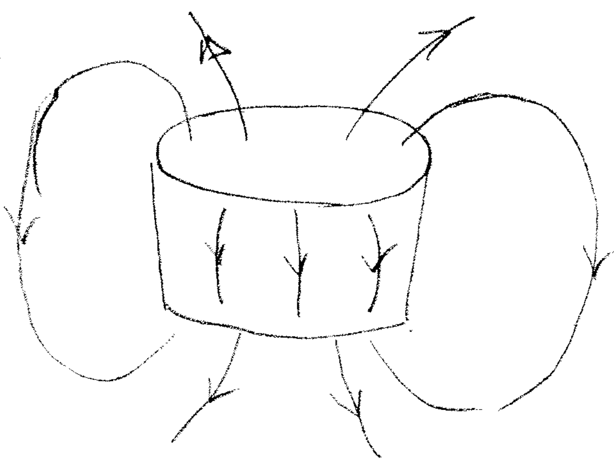
Pour $\vec{D}$

surfaces 1 et 2 : $\vec{D}_2 = \vec{D}_1$

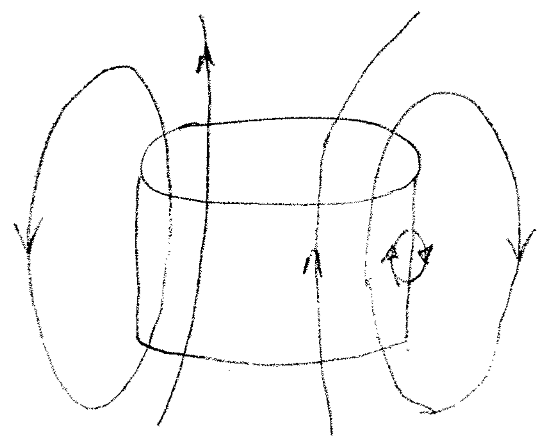
surface 3 : $D_{2\perp} = D_{1\perp}$, $\vec{D}_{2\parallel} = \vec{D}_{1\parallel} - P_0 \hat{z}$

d) Pour $\vec{E}$: à l'extérieur, champ d'un dipôle ; à l'intérieur, champ d'un condensateur ; continuité de $\vec{E}$ à la surface 3

Pour $\vec{D}$: à l'extérieur, mêmes lignes que $\vec{E}$; surfaces 1 et 2 ; continuité de $\vec{D}$; surface 3 : discontinuité de $\vec{D}_{\parallel}$



$\vec{E}$



$\vec{D}$

3 - a) surface S_1 :

Par symétrie, $\vec{B} = B_S \hat{\phi}$

et $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi s B = \int_{S_1} \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{a} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_{S_1} \partial_t \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

Sur S_1, $\vec{J} = 0$ et

$$\int_{S_1} \partial_t \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\pi s^2 I}{\varepsilon_0 \pi a^2} = \frac{I}{\varepsilon_0} \frac{s^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{s}{a^2} \hat{\phi}$$

b) surface S_2 :

$$\partial_t \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{a} = \mu_0 I_{inc} = \mu_0 (I - I'(s))$$

où $I'(s)$ est le courant radial sur le disque.

Soit $q(s)$ la charge sur la plaque du condensateur à l'intérieur d'un rayon s. On doit avoir

$$q(s) = (I - I'(s))\, t$$

Comme σ est uniforme, on a aussi

$$q(s) = \sigma \pi s^2 = I \frac{s^2}{a^2} t$$

$$\Rightarrow \quad I - I'(s) = I\frac{s^2}{a^2}$$

[Explicitement, $I'(s) = I\left(1 - \frac{s^2}{a^2}\right)$

vérification : $I'(0) = I$ et $I'(a) = 0$]

$$\Rightarrow \quad 2\pi s B = \mu_0 I \frac{s^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\hat{\varphi}$$ comme en (a).

no4 - a) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} = -\vec{\nabla}\times(\partial_t\vec{A})$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{E}+\partial_t\vec{A}) = 0 \Rightarrow \vec{E}+\partial_t\vec{A} = -\vec{\nabla}V$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial_t\vec{A}$$

b) 1° Solution acceptée

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{J}}{r}\right) d\tau'$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{J}}{r}\right) = \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{J}}{r} + \vec{J}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$$

mais $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ car $\vec{J}$ ne dépend pas de $\vec{r}$

et $\vec{J}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\vec{J}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r}\right)$

$$= -\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{J}}{r}\right) + \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}}{r}$$

$$= -\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{J}}{r}\right) - \frac{\partial_t\rho}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int\frac{\partial_t\rho}{r}\,d\tau' + \int\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{J}}{r}\right)d\tau'\right]$$

$$= -\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\partial_t\int\frac{\rho}{r}\,d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi}\cancelto{0}{\oint\frac{\vec{J}}{r}\cdot d\vec{a}}$$

$$= -\varepsilon_0\mu_0\,\partial_t V$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t V = 0$$

2° La solution en (1°) est fausse car $\vec{J}(\vec{r}', t_r)$ dépend de $\vec{r}$ via t_r.

Ainsi, $\partial_x J_x = \partial_x J_x \Big|_{t_r \text{ fixe}} + \partial_{t_r} J_x \, \partial_x t_r$

et $\partial_x t_r = -\frac{1}{c} \partial_x r$

de même pour y et z

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \Big|_{t_r \text{ fixe}} - \frac{1}{c} \partial_{t_r} \vec{J} \cdot \vec{\nabla} r$$

$$= -\frac{1}{c} \partial_{t_r} \vec{J} \cdot \vec{\nabla} r$$

de même, $\vec{\nabla}' \cdot \vec{J} = \vec{\nabla}' \cdot \vec{J} \Big|_{t_r \text{ fixe}} - \frac{1}{c} \partial_{t_r} \vec{J} \cdot \vec{\nabla}' r$

$$= -\partial_t \rho + \frac{1}{c} \partial_{t_r} \vec{J} \cdot \vec{\nabla} r$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}}{r} + \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$= \frac{-1}{rc} \partial_{t_r} \vec{J} \cdot \vec{\nabla} r - \vec{J} \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$= \frac{-1}{rc} \partial_{t_r} \vec{J} \cdot \vec{\nabla} r - \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) + \frac{1}{r} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}$$

$$= \frac{-1}{rc} \partial_{t_r} \vec{J} \cdot \vec{\nabla} r - \frac{\partial_t \rho}{r} + \frac{1}{rc} \partial_{t_r} \vec{J} \cdot \vec{\nabla} r - \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{r} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{J}}{r}\right) = -\frac{\partial_t \rho}{r} - \vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{J}}{r}\right)$$

la suite est identique à 1°

c) $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

1° $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = -\varepsilon_0\mu_0\vec{\nabla}V$

2° $-\nabla^2\vec{A} = -\varepsilon_0\mu_0\,\partial_t^2\vec{A} + \mu_0\vec{J}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} - \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t\left(\vec{\nabla}V + \partial_t\vec{A}\right)$$

$$= \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t\vec{E}$$